Exercices d'application – Suites numériques

Exercices d'application

Exercice 1

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_{n+1} = 3u_n - 1 \end{cases}$$

On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $a_n = u_n - \dfrac{1}{2}$.

1. Montrer que (a_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 2

Soit (v_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} v_0 = \dfrac{1}{2} \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ v_{n+1} = -\dfrac{4v_n + 1}{4v_n} \end{cases}$$

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n \neq -\dfrac{1}{2}$.
2. On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $b_n = \dfrac{2}{2v_n + 1}$.
   a) Montrer que (b_n) est une suite arithmétique, dont on déterminera la raison et le premier terme.
   b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq u_n < 1$.
   b) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

2. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique, puis exprimer v_n en fonction de n.

   b) En déduire u_n en fonction de n.

Exercice 4

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_1 = 1 \ ; \ v_1 = 0 \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \ ; \ u_{n+1} = 2v_n \ \text{ et } \ v_{n+1} = u_n + v_n$$

1. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $d_n = u_n - v_n$.
   Calculer d_{n+1} en fonction de d_n, en déduire d_n en fonction de n.

2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.

3. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $x_n = u_{n+1} + u_n$ et $y_n = u_{n+1} - 2u_n$.

   a) Montrer que (x_n) et (y_n) sont deux suites géométriques, puis exprimer u_n en fonction de n.

   b) Exprimer v_n en fonction de n.

Exercice 5

Soit (u_n) la suite numérique définie par son premier terme u_1 et par la relation de récurrence suivante : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ ; \ (n+2)u_{n+1} = nu_n + 1 - n \quad (E)$.

1. a) Calculer u_2 et u_3 en fonction de u_1.

   b) On pose $\alpha_n = an + b$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ où a et b sont deux réels.
   Déterminer a et b sachant que la suite $(\alpha_n)_n$ vérifie la relation (E).

2. Soit (x_n) la suite numérique définie par : $x_n = u_n - \alpha_n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$, avec $u_1 = 1$ avec (α_n) vérifiant (α_n).

   a) Montrer que $x_{n+1} = \dfrac{n}{n+2} x_n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

   b) Exprimer x_n puis u_n en fonction de n.

   c) Calculer les sommes : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ en fonction de n.

Exercice 6

1. On considère la suite numérique (v_n) telle que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ ; \ v_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)(p+2)}$$

   a) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que :

$$(\forall p \in \mathbb{N}^*) \ ; \ \frac{1}{p(p+1)(p+2)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p+1} + \frac{c}{p+2}$$

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $v_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2n+2} - \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{2n+4}$, puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

2. On considère la suite numérique (w_n) définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \; ; \; w_n = \frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right)$$

a) Déterminer w_n en fonction de n. Remarquer : $\dfrac{1}{\sqrt{p-1}+\sqrt{p}} = \sqrt{p} - \sqrt{p-1}$.

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$.

Exercice 7

Déterminer dans chacun des cas suivant, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$:

1. $u_n = \dfrac{\cos n}{n}$
2. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$
3. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
4. $u_n = \dfrac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}$
5. $u_n = \dfrac{1}{n^3} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$
6. $u_n = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(kx)$

Exercice 8

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; u_{n+1} = u_n + \alpha^n \end{cases} \qquad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}$$

Étudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice 9

Soit (u_n) une suite d'entiers naturels telle que (u_n) est strictement croissante.

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \geq n$.
2. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 10

1. Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $\arctan\left(\dfrac{1}{1+x+x^2}\right) = \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$.

2. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $u_n = \arctan\left(\dfrac{1}{1+n+n^2}\right)$, et on considère la suite numérique (S_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

   a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

   b) Déterminer S_n en fonction de n, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 11

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 2} \end{cases}$$

1. a) Montrons que la suite (u_n) est strictement croissante.

   b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n < 2$.

2. On pose : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$.

   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

   b) Exprimer u_n en fonction de n. c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 12

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_n = \dfrac{n}{2^n} + 1$.

1. a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

   b) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

2. a) Montrer que : $(\forall n \in (\mathbb{N}^* \setminus \{1\}))$; $2^n > C_n^2$.

   b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})$; $1 < u_n < \dfrac{2}{n-1} + 1$.

   c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 13

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \; ; \; u_1 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; \dfrac{1}{u_{n+2}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{u_{n+1}} + \dfrac{1}{u_n}\right) \end{cases}$$

1. Calculer u_2 et u_3.

2. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{4u_n - 1}$.

3. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\dfrac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.

4. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{1}{u_n} - \dfrac{4}{3}$, montrer que (v_n) est une suite géométrique, puis exprimer v_n et u_n en fonction de n.

5. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 14

1. Montrer que : $(\forall x \in]0,1[)$; $\sqrt{1-x} < 1 - \dfrac{1}{2}x < \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

2. Soit (u_n) la suite numérique définie que :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*) \ ; \ u_n = \left(1 - \dfrac{1}{2n}\right) u_{n-1} \end{cases}$$

   Écrire u_n en fonction de n.

3. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n\sqrt{n+1}$ et $w_n = u_n\sqrt{n}$.

   a) Montrer que la suite (v_n) est strictement décroissante et que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ ; \ u_n < \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$$

   b) Montrer que la suite (w_n) est strictement croissante et que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ ; \ \frac{1}{4\sqrt{n}} \leq u_n$$

   c) Étudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice 15

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \sqrt[3]{\dfrac{2}{7}} \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_{n+1} = \sqrt[3]{\dfrac{1+u_n^3}{8}} \end{cases}$$

1. a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > \sqrt[3]{\dfrac{1}{7}}$.

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

c) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

2. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{7}{8}u_n^3 - \dfrac{1}{8}$.

   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{8}$.

   b) Exprimer u_n en fonction de n, puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 16

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $2^n > n$.

2. On considère la suite numérique (x_n) définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ ; \ x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

   Montrer que la suite (x_n) est strictement croissante et majorée, puis en déduire qu'elle est convergente.

3. On considère la suite (y_n) définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ ; \ y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k}$$

   Montrer que la suite (y_n) est majorée, et en déduire qu'elle est convergente.

Exercice 17

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 2}{u_n^2 + 1} \ ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_n < 2$.

2. Étudier la monotonie de la suite (u_n).

3. a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $2 - u_{n+1} \leq \dfrac{4}{5}(2 - u_n)$.

   b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < 2 - u_n \leq \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$.

   c) En déduire que la suite (u_n) est convergente, puis calculer : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 18

On a :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} \ ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > 3$.
2. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
3. a) Montrer que : $u_{n+1} - 3 > \dfrac{3}{2}(u_n - 3)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

   b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \geq \left(\dfrac{3}{2}\right)^n + 3$.

   c) Calculer : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 19

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1. a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

   b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \geq 2^n$, et en déduire $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$.

2. On pose : $v_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{u_k + 1}$.

   a) Vérifier que : $\dfrac{1}{1 + u_k} = \dfrac{1}{u_k} - \dfrac{1}{u_{k+1}}$ pour tout k de $\mathbb{N}$.

   b) En déduire que la suite (v_n) est convergente.

Exercice 20

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{1 + u_n^2}} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente, puis calculer $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$.
2. Calculer de deux façons la somme suivante $\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} v_k$ où $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$; $v_k = \dfrac{1}{u_k^2} - \dfrac{1}{u_{k-1}^2}$, puis en déduire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} n u_n^2 = 1$.

Exercice 21

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 > 3\sqrt{2} \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}\left(u_n + \dfrac{1}{u_n^2}\right) \end{cases}$$

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_n > 0$.
2. a) Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_{n+1} - 3\sqrt{2} = \frac{2u_n + 3\sqrt{2}}{3u_n^2}(u_n - 3\sqrt{2})^2 \quad (1)$$

   b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_n \geq 3\sqrt{2}$.

   c) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_{n+1} - 3\sqrt{2} \leq \dfrac{2}{3}(u_n - 3\sqrt{2})$.

   b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_n - 3\sqrt{2} \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n (u_0 - 3\sqrt{2})$.

   c) Calculer : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 22

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par : $u_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}}$.

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ 0 \leq u_n \leq 1$.
2. Étudier la monotonie de la suite (u_n), en déduire qu'elle est convergente.
3. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right)$, puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 23

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{9x}{x^3+6}$.
On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Montrer que f est strictement croissante sur l'intervalle $I = \left[0; \sqrt[3]{3}\right]$ et que $f(I) = I$.
2. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ 1 \leq u_n \leq \sqrt[3]{3}$.
3. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente, et calculer sa limite.

Exercice 24

Soit α un élément de l'intervalle $]0;1[$.
Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 \in \left[0;\sqrt{\alpha}\right] \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} = \frac{u_n + \alpha}{u_n + 1}$$

1. a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ 0 \leq u_n \leq \sqrt{\alpha}$.
   b) Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2. Soit (v_n) la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k!}$.

   a) Soit k un élément de $\mathbb{N}$, tel que : $k \geq 2$.
   Vérifier que : $k! \geq 2^{k-1}$, en déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ v_n < 3\sqrt{\alpha}$.
   b) En déduire que la suite (v_n) est convergente.

Exercice 25

On considère la suite numérique (x_n) définie par :

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{1}{2} \\ (\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ x_{n+1} = x_n + 1 - \sqrt{1 + x_n^2} \end{cases}$$

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ 0 < x_n < 1$.
2. Montrer que la suite (x_n) est décroissante.
3. Déduire que la suite (x_n) est convergente et calculer la limite.
   (On peut considérer la fonction : $f : x \mapsto x + 1 - \sqrt{1 + x^2}$.)

Exercice 26

On considère la suite définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ u_{n+1} = \dfrac{7}{u_n + 6} \end{cases}$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $x_n = u_{2n}$ et $y_n = u_{2n+1}$.
On admet que : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ ;\ u_n > 0$.

1. Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n, puis y_{n+1} en fonction de y_n.
2. a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ x_n < 1 < y_n$.
   b) Montrer que $(x_n)_{n\geq 1}$ est croissante et que $(y_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
3. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})\ ;\ |1 - u_n| < \dfrac{1}{6^{n-1}}$.
4. En déduire que les suites $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

Exercice 27

On considère la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $s_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}}$.

1. a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$.

   b) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$ et : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{s_n}{\sqrt{n}} = 2$.

2. On considère la suite (u_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_n = s_n - 2\sqrt{n}$.

   a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

   b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_n > -2$. Que peut-on conclure ?

3. On considère la suite (v_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $v_n = s_n - 2\sqrt{n+1}$.
   Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 28

Soit a et b deux nombres réels tels que : $a > b > 0$.
On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par :

$$\begin{cases} a_0 = a \ ; \ b_0 = b \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \dfrac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \end{cases}$$

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $a_n > b_n > 0$.

2. Montrer que la suite (a_n) est strictement décroissante et que la suite (b_n) est strictement croissante.

3. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $a_{n+1} - b_{n+1} < \dfrac{1}{2}(a_n - b_n)$.

4. En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

5. En déduire que $(a_n \times b_n)_n$ est constante et en déduire la limite commune des suites (a_n) et (b_n).

Exercice 29

Soit a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$.
On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = a \ ; \ v_0 = b \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_{n+1} = \sqrt{u_n \cdot v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_n < v_n$.

2. Étudier la monotonie des suites (u_n) et (v_n).

3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 30

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ (\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ 2 \leq u_n \leq 3$.
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $a_n = u_{2n}$ et $b_n = u_{2n+1}$.
   Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n puis b_{n+1} en fonction de b_n.
3. a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ 0 < a_n < b_n$.
   b) Étudier la monotonie des suites (a_n) et (b_n).
4. a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ b_{n+1} - a_{n+1} \leq \dfrac{1}{25}(b_n - a_n)$.
   b) En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et déterminer leur limite commune.

Exercice 31

On considère les suites $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ définies par :

$$(\forall n \geq 2)\ ;\ u_n = 2^{n+1} \times \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \quad \text{et} \quad v_n = 2^{n+1} \times \tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$$

1. Montrer que (u_n) est strictement croissante et (v_n) strictement décroissante.
2. a) Montrer que : $(\forall n \geq 2)\ ;\ u_n < v_n$.
   b) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.
3. En déduire que les suites $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ sont convergentes et calculer leurs limites.

Exercice 32

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $x_n = u_{2n+1}$ et $y_n = u_{2n}$.

1. Montrer que f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$ et que $f([0;+\infty[) \subset [0;+\infty[$.
2. a) Montrer par récurrence que la suite (x_n) est strictement croissante et que la suite (y_n) est strictement décroissante. (On montrera d'abord que $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ f\circ f(x_n) = x_{n+1}$ et $y_{n+1} = f\circ f(y_n)$.)
   b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ x_n \leq y_n$.
3. a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ \dfrac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.
   b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ |u_{n+1} - u_n| \leq \left(\dfrac{4}{9}\right)^n$.
4. a) Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes et calculer leur limite commune.
   b) Montrer que la suite (u_n) est convergente puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercices de synthèses

Exercice 33

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

1. a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; u_n \geq 1$.
   b) Étudier la monotonie de la suite (u_n).
2. a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \; ; \; 2 \leq u_n^2 - u_{n-1}^2 \leq 2 + u_n - u_{n-1} \quad (1)$
   et $\quad 2n \leq u_n^2 - 1 \leq 2n + u_n - 1 \quad (2)$
   b) En déduire que la suite (u_n) est divergente.
3. a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \; ; \; 1 - \dfrac{1}{u_n} \leq \dfrac{2n}{u_n^2} \leq 1 - \dfrac{1}{u_n^2}$.
   b) En déduire que : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{2n}}{u_n} = 1$.

Exercice 34

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; u_{n+1} = \sqrt{n + 1 + u_n}$ et $u_0 = 1$.

1. Calculer u_1 et u_2, et montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; 0 < u_n$.
2. Montrer que $(\forall x \in [0; +\infty[) \; ; \; \sqrt{x} \leq \dfrac{1}{2}(1 + x)$.
3. a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; \sqrt{n} \leq u_n$.
   b) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; u_n \leq n + \dfrac{1}{2^n}$.
   c) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \; ; \; u_n \leq \sqrt{2n}$.
   En déduire que : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}} = 1$.
4. Soit (v_n) la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; v_n = u_n - \sqrt{n}$; montrer que (v_n) est convergente.

Exercice 35

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \; ; \; u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

1. a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \; ; \; x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.
   b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \; ; \; \displaystyle\frac{1}{n^3}\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) - \frac{1}{6n^6}\left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)$.

c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\sum_{k=1}^{n} k^3 \leq n^4$.

2. Calculer $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 36

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $0 < \alpha < 1$.
On considère les suites (a_n) et (S_n) définies par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; a_n = (1-\alpha)^n \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

1. Montrer que les suites (a_n) et (S_n) sont convergentes puis calculer $\lim_{n \to +\infty} a_n$ et $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

2. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 > 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = u_n + \dfrac{a_n}{u_n}$.

   a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > 0$ et que (u_n) est une suite strictement croissante.

   b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \leq u_0 + \dfrac{1}{\alpha u_0}$.

   c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 37

1. Soit (u_n) la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.
   Montrer que (u_n) est convergente en déterminant sa limite.

2. On considère la suite (v_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $v_n = \sin\left(\dfrac{a}{2^n}\right) \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\dfrac{a}{2^k}\right)$
   où $a \in \mathbb{R}$, tel que $a \neq k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
   Montrer que la suite (v_n) est convergente.

3. a) Soit $x \in \mathbb{R}$, tel que $x \neq \dfrac{k\pi}{2}$ où $k \in \mathbb{Z}$.
   Vérifier que : $\tan x = \cot x - 2\cot(2x)$.

   b) On considère la suite (w_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $w_n = \sum_{p=0}^{n} \dfrac{1}{2^p} \tan\left(\dfrac{\theta}{2^p}\right)$
   où $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \neq \dfrac{k\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
   Calculer $\lim_{n \to +\infty} w_n$.

Exercice 38

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x^3 + nx - 1$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n sur $\mathbb{R}$ et que : $0 < x_n < 1$.

2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante, et en déduire qu'elle est convergente.

3. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $0 < x_n < \dfrac{1}{n}$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Exercice 39

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = 2x^3 - x^2 + 2(n+1)x - 1$$

1. a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n sur $[0;1]$.
   b) Déterminer le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ selon les valeurs de x.
   c) En déduire que (α_n) est décroissante et qu'elle est convergente.
2. a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\dfrac{-1}{2n+2} \leq \alpha_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
   b) En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$.

Exercice 40

On considère la fonction polynôme P_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - 1 \quad \text{tel que } (n \in \mathbb{N}^*)$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n sur l'intervalle $[0;1]$.
2. a) Montrer que $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $P_{n+1}(x) > P_n(x)$.
   b) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante.
3. a) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
   Montrer que : $P_n(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1-x} - 2$.
   b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $2\alpha_n - (\alpha_n)^{n+1} - 1 = 0$.
   c) Déterminer α_2 et vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$; $\alpha_n < \alpha_2$, et en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha_n)^n = 0$.
   d) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 41

I) Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \ ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Calculer u_2 et u_3.

2. Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a :

   a) $u_n \geq n$

   b) $u_n \times u_{n+2} + (-1)^{n+1} = (u_{n+1})^2$

II) Soit (α_n) et (β_n) les suites définies par : $\alpha_n = \dfrac{u_{2n-1}}{u_{2n}}$ et $\beta_n = \dfrac{u_{2n}}{u_{2n+1}}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

1. a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\beta_n - \alpha_n = \dfrac{1}{u_{2n} \cdot u_{2n+1}}$.

   b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\alpha_n < \beta_n$ et $0 < \beta_n - \alpha_n < \dfrac{1}{n}$ (utiliser I)2)b)).

2. a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \dfrac{1}{u_{2n} \cdot u_{2n+2}}$ (utiliser I) 2) b)).

   b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\alpha_n = \dfrac{1}{\beta_n} - 1$.

   c) En déduire la monotonie de chacune des suites (α_n) et (β_n).

3. a) Montrer que les suites (α_n) et (β_n) sont adjacentes.

   b) Calculer la limite de chacune des suites (α_n) et (β_n).

Exercice 42

On considère les suites numériques (a_n) et (b_n) définies par :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \ ; \ a_1 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}) \ ; \ a_n = na_{n-1} + a_{n-2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_0 = b_1 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}) \ ; \ b_n = nb_{n-1} + b_{n-2} \end{cases}$$

1. a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $a_{n-1}b_n - a_n b_{n-1} = (-1)^n$.

   b) Montrer que la suite (b_n) est croissante et que $b_n > (n+1)b_{n-2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$, tel que $n \geq 3$.

2. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \dfrac{a_{2n-1}}{b_{2n-1}}$ et $v_n = \dfrac{a_{2n}}{b_{2n}}$.

   a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $0 < u_n - v_n < \dfrac{2}{(n+1)!}$.

   b) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 43

Soit (u_n) une suite numérique et ℓ un nombre réel.
On pose $x_n = u_{2n}$ et $y_n = u_{2n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Montrer que :

$$\left(\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell\right) \Longleftrightarrow \left(\lim_{n \to +\infty} x_n = \ell \ \text{ et } \ \lim_{n \to +\infty} y_n = \ell\right)$$

2. Soit (v_n) une suite numérique décroissante ayant pour limite 0.

   a) On suppose que : $u_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k v_k$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
   Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

   b) Montrer que la suite numérique (a_n) définie par :

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

   est convergente.

Exercice 44

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{1-2u_n^2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$; où a est un nombre réel de l'intervalle $\left]0, \dfrac{1}{4}\right]$.

1. a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_n < \dfrac{1}{4}$ et que la suite (u_n) est décroissante.

   b) Montrer que (u_n) est convergente et que : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

2. On considère la suite (S_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $s_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$

   et on pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = S_{2n}$ et $w_n = S_{2n+1}$.

   a) Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.
   Soit ℓ la limite commune de (v_n) et (w_n).

   b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} \leq \dfrac{2}{7}u_n$.

   c) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|s_n - v_n| \leq a \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^k$.

   d) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \ell$ (Remarquer que : $|s_n - \ell| \leq |s_n - v_n| + |v_n - \ell|$)

Exercice 45

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases}$$

I)

1. Déterminer la nature de la suite (u_n) dans chacun des cas : $u_0 = 0$ et $u_0 = 1$.

2. a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

   b) Montrer que si la suite (u_n) est convergente alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

c) Montrer que si $u_0 < 0$ ou $u_0 > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

II) On suppose que : $u_0 \in]0;1[$.

1. a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_n < 1$.

   b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

2. Soit (s_n) la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{u_k^2}{1+u_k}$.

   a) Vérifier que : $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k^2 = u_0 - u_{n+1}$, en déduire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k^2 = u_0$.

   b) Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N})$; $0 < \dfrac{u_k^2}{1+u_k} < u_k^2$.

   c) Montrer que la suite (s_n) est convergente.

3. a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} > 1$.

   b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_n < \dfrac{1}{n+1}$.

Exercice 46

Soit k un élément de $\mathbb{N}^*$.
On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = k$ et $u_{n+1} = k + \dfrac{1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. a) Calculer u_1 et u_2 en fonction de k.

   b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $k \leq u_n \leq k+1$.

2. Soit (x_n) et (y_n) les suites définies par : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $x_n = u_{2n}$ et $y_n = u_{2n+1}$.

   a) Calculer x_{n+1} en fonction de x_n puis calculer y_{n+1} en fonction de y_n.

   b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $x_n < y_n$ et $y_n = k + \dfrac{1}{x_n}$.

   c) Étudier la monotonie de chacune des suites (x_n) et (y_n).

   d) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $y_{n+1} - x_{n+1} \leq \dfrac{y_n - x_n}{(1+k^2)^2}$.

   e) En déduire que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes, et calculer leur limite commune.

Exercice 47

On considère la suite (α_n) telle que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ \alpha_{n+4} = \frac{1}{4}\left(\alpha_n + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \alpha_{n+3}\right)$$

Soit (a_n) et (b_n) les suites définies par : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $a_n = \min(\alpha_n; \alpha_{n+1}; \alpha_{n+2}; \alpha_{n+3})$
et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $b_n = \max(\alpha_n; \alpha_{n+1}; \alpha_{n+2}; \alpha_{n+3})$.

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $a_n \leq \alpha_{n+4}$, en déduire que la suite (a_n) est croissante.

2. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $b_n \geq \alpha_{n+4}$, en déduire que la suite (b_n) est décroissante.

3. a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $a_0 \leq a_n \leq \alpha_n \leq b_n \leq b_0$.

   b) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.
   On pose : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$.

4. a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\alpha_{n+4} \leq \dfrac{1}{4}a_n + \dfrac{3}{4}b_n$.

   b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\alpha_{n+4} \leq \dfrac{3}{4}b_n + \dfrac{1}{4}a$.

   c) En utilisant la dernière inégalité (pour les termes) $\alpha_{n+5}, \alpha_{n+6}, \alpha_{n+7}$ montrer que : $b \leq a$.

5. Montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

6. Montrer que $(\alpha_n)_n$ est une suite convergente et calculer sa limite.

Exercice 48

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par :

$$0 < u_0 < v_0 \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} \cdot v_n} \end{cases}$$

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > 0$ et $v_n > 0$ (1)
   et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n < v_n$ (2)

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.

3. a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < v_n - u_n < \dfrac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$.

   b) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

4. On suppose que : $u_0 = v_0 \cos\alpha$ où $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

   a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = v_n \cos\left(\dfrac{\alpha}{2^n}\right)$.

   b) En déduire que :
   $$v_n = v_0 \times \frac{\sin\alpha}{2^n \sin\left(\dfrac{\alpha}{2^n}\right)}$$

   c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ en fonction de v_0 et α.
   En déduire que : $\left(\forall \alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\right)$; $\sin\alpha \leq \alpha \leq \tan\alpha$.

   d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ dans le cas où $v_0 = 2$ et $u_0 = 1$.