Exercices d'application

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\ln(x^2) = 16$
2. $(\ln(x))^2 = 16$
3. $\ln(x^2 - 4) - \ln(1 - 4x) = 0$
4. $\ln(x - 2) + \ln(4 - x) = \ln(2x - 5)$

5) $\ln(4x + 2) - \ln(x - 1) = 2\ln(x)$

6) $(\ln(x))^2 - \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 2$

7) $\ln(10 - x^2) = 2\ln(3) - \ln(x^2)$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\ln x < 3\ln(2) - \ln(3)$
2. $\ln(x^2 - 1) < 0$
3. $\ln(\ln(x)) > 0$

4) $(1 - \ln(x))(3 + \ln(x)) \geq 0$

5) $\frac{2+\ln(x)}{2\ln(x)-1} < 0$

6) $\ln(x + 6) > 2\ln x$

Exercice 3

Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} \ln(x) - \ln(y) = 2 \\ 2\ln(x) - 3\ln(y) = 5 \end{cases}$
2. $\begin{cases} \ln(x^2 \cdot y^3) = -4 \\ \ln\left(\frac{x^3}{y^4}\right) = 11 \end{cases}$

3) $\begin{cases} (\ln(x)).(\ln(y)) = -15 \\ \ln(xy) = -2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ \ln(x) + \ln(y) = \ln(3) \end{cases}$

Exercice 4

Soit a et b deux réels tels que : $a > 1$ et $0 \leq b < a$
Montrer que : $(\ln(a - b)) \cdot (\ln(a + b)) \leq (\ln(a))^2$

Exercice 5

Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f, dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = \ln|x-1| + \ln(x)$
2. $f(x) = x\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$
3. $f(x) = \frac{\ln(x)}{1-\ln(x)}$

4) $f(x) = \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x-2}$

5) $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(x - \frac{1}{x}\right)$

6) $f(x) = \ln(k^2 - 2k\cos(x) + 1)$ où $k \in \mathbb{R}$

Exercice 6

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2(x)}{x^3}$
2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}}$
3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^2}$
4. $\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(x^2-x+1)}{2x+1}$
5. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+2)}{\ln(2x+1)}$

6) $\lim_{x\to0^+} x^3\ln^2(x)$

7) $\lim_{x\to0^+} \sqrt[3]{x}\cdot\ln^2(x)$

8) $\lim_{x\to0^+} x\cdot\sqrt{|\ln x|}$

9) $\lim_{x\to1^+} \left(\frac{2x}{x-1} + \ln(x-1)\right)$

10) $\lim_{x\to2^+}(x-2)\ln(x^2-2x)$

Exercice 7

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{|x|\to+\infty} \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$
2. $\lim_{x\to1^+} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$
3. $\lim_{x\to+\infty} 2x^2 - x - \ln(x+1)$
4. $\lim_{x\to+\infty} 3x - \ln(x^2+1)$
5. $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$

6) $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

7) $\lim_{x\to3} \frac{x}{x-3}\cdot\ln\left(\frac{x}{3}\right)$

8) $\lim_{x\to0} \frac{1}{x^2}\cdot\ln(\cos x)$

9) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2(x)-\ln(x)}{1+2\ln(x)}$

10) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1+\sqrt{x^2+1})}{2x}$

Exercice 8

Déterminer dans chacun des cas suivants, la fonction dérivée de la fonction f :

1. $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$
2. $f(x) = \frac{x\ln|x|}{x-1}$
3. $f(x) = x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$
4. $f(x) = x\left(1 - \frac{1}{\ln(x)}\right)^2$

5) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{|\ln x|}$

6) $f(x) = \sqrt{1 - \ln(x-1)}$

7) $f(x) = x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x)$

8) $f(x) = \ln(x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 2})$

Exercice 9

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})$

1. Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f
2. étudier la dérivabilité de f à droite en -1 et à gauche en 1
3. Calculer $f'(x)$ pour tout élément x de $D - \{1; -1\}$

Exercice 10

Soit u la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]-1; +\infty[$ par $u(x) = x - \ln(x+1)$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction u.
2. En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$

Exercice 11

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \ln\left|1 - \frac{1}{x}\right|$$

et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a- Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f.

   b- Déterminer les limites aux bornes des intervalles de D

2. a- Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

   b- Montrer que le point $A\left(\frac{1}{2},0\right)$ est un centre de symétrie de la courbe $(\mathcal{C})$.

3. Construire $(\mathcal{C})$.

Exercices de synthèses

Exercice 12

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x)=\frac{1}{\ln(x)}+\ln(|\ln(x)|)$$

et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. a- Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f.

   b- Calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to 0^+} f(x)$; $\lim_{x\to 1^+} f(x)$; $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

   c- Etudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C})$.

2. a- Montrer que : $(\forall x\in D); f'(x)=\frac{-1+\ln(x)}{x(\ln(x))^2}$

   b- Dresser le tableau de variations de f.

3. a- Montrer que : $(\forall x\in D); f''(x)=\frac{\ln(x).(2-(\ln x)^2)}{(x\ln^2(x))^2}$

   b- Déterminer les points d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C})$.

4. Construire $(\mathcal{C})$.

Exercice 13

1ère Partie: Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$g(x) = \ln(\ln(x)) - \frac{x+1}{x\ln(x)}$$

1. Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction g puis calculer les limites aux bornes de D.

2. Etudier les variations de g.

3. a- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $6,4 < \alpha < 6,5$.

   b- En déduire le signe de $g(x)$ sur D.

2ème partie: On considère la fonction numérique f définie sur $[1; +\infty[\setminus\{e\}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x+1}{\ln(\ln(x))} & \text{si } x > 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a- Montrer que f est continue à droite en 1.

2. b- Etudier la dérivabilité de f à droite en 1, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3. 2) a- Montrer que : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

   b- Calculer : $\lim_{x\to e^+} f(x)$ et $\lim_{x\to e^-} f(x)$.

4. 3) Etudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C})$.

5. 4) a- Dresser le tableau de variations de f.

   b- Construire la courbe $(\mathcal{C})$.

Exercice 14

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{\ln(1-x)}}{1-x}$$

et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. a- Déterminons D l'ensemble de définition de la fonction f.

   b- Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et étudier la branche infinie de la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $-\infty$.

2. Etudier la dérivabilité de f à gauche en $x_0 = 0$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3. a- Calculer $f'(x)$ pour tout x élément de $D-\{0\}$, puis dresser le tableau de variations de f.

   b- Construire la courbe $(\mathcal{C})$.

Exercice 15

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \ln((\sqrt{x-1}-1)^2)$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f et calculer ses limites aux bornes de D.

2. Etudier la dérivabilité de f à droite en 1, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3. Etudier les variations de f.

4. a- Etudier les branches infinies.

   b- Etudier la concavité de $(\mathcal{C})$.

5. a- Ecrire une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 5.

   b- Construire $(\mathcal{C})$ et (T).

Exercice 16

1ère partie: Soit g la fonction numérique définie sur $I = [-1, 0[\cup]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{(x+1)^2}{x(x+2)} - \ln|x(x+2)|$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

2. a- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

   b- En déduire le signe de $g(x)$ sur I.

2ème partie: Soit f la fonction numérique définie sur $D = \mathbb{R} - \{-2; 0\}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln|x(x+2)|}{(x+1)^2} & ; x \neq -1 \\ f(-1) = -1 \end{cases}$$

et soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que la droite (Δ) d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie pour $(\mathcal{C}_f)$.

2. a- Calculer : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

   b- Montrer que la fonction f est continue en -1 (on peut utiliser le résultat suivant : $\left(\forall t \in \left]0, \frac{1}{4}\right[\right), -\frac{t^2}{2} - t^3 \leq \ln(1-t) + t \leq -\frac{t^2}{2}$).

4) a- Montrer que : $(\forall x \in I - \{-1\}); f'(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \cdot g(x)$.

   b- Vérifier que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha(\alpha+2)}$ puis dresser le tableau de variations de f sur D.

3. 5) a- Déterminer les points d'intersection de $(O; \vec{i})$ avec la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

   b- Tracer $(\mathcal{C}_f)$ (on prend : $\alpha \simeq 1,14$ et $f(\alpha) \simeq 0,28$).

Exercice 17

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*); (u_{n+1})^2 = 4u_n \end{cases}$

1. Ecrire u_2 et u_3 en fonction de 2^α où $\alpha \in \mathbb{Q}$.
2. Soit (v_n) la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); v_n = \ln(u_n) - \ln(4)$.

   a- Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

   b- En déduire u_n en fonction de n.

Exercice 18

On considère les fonctions numériques u et v définies par : $u(x) = x - 1 - \ln x$ et $v(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{3}{2} + \ln(x)$

1. a- Dresser les tableaux des variations des fonctions u et v.

   b- En déduire que : $(\forall a \in]0; +\infty[); a - \frac{a^2}{2} < \ln(1+a) < a$
2. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$

   a- Montrer que :
   $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{(n+1)(2n+1)}{n^3}\right) < \ln(P_n) < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

   b- En déduire $\lim_{n \to +\infty} P_n$.

Exercice 19

On considère la fonction f_n définie sur $]0, +\infty[$ par $f_n(x) = x - n + \frac{n}{2}\ln(x)$ où $n \in \mathbb{N}^*$

1. Dresser le tableau de variations de f_n
2. a- Montrer que : $(\exists! \alpha_n \in]0, +\infty[), f_n(\alpha_n) = 0$

   b- Montrer que : $1 \leq \alpha_n < e^2$

   c- Vérifier que : $\ln(\alpha_n) = 2 - \frac{2}{n}\alpha_n$
3. Ecrire $f_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de α_n et n, puis déduire que $\alpha_{n+1} > \alpha_n$

4. a- Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est convergente. On pose $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \ell$

   b- Calculer : $\lim_{n\to+\infty} \ln(\alpha_n)$

Exercice 20

1. On considère la suite numérique (u_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

   a- Calculer u_1, u_2 et u_3.

   b- Montrer que : $(\forall x \in [0, +\infty[); \ln(1+x) \leq x$ et $\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x)$
   En déduire que : $(\forall k \in \mathbb{N}^*); \frac{1}{1+k} \leq \ln(1+k) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$

   c- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_{n+1} - 1 \leq \ln(1+n) \leq u_n$; en déduire que :
   $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \ln(1+n) \leq u_n \leq 1 + \ln(n)$

   d- Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

2. On considère la suite numérique (c_n) définie par :
   $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}); c_n = u_{n-1} - \ln(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln(n)$

   a- Soit n un entier tel que $n \geq 2$. Calculer $c_{n+1} - c_n$, et en déduire la monotonie de la suite (c_n).

b- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})$; $c_n \leq 1 + \ln(n-1) - \ln(n)$

c- En déduire que la suite (c_n) est convergente (le nombre $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \gamma$, appelé la constante d'Euler et on a $\gamma \simeq 0,577215...$).

Exercice 21 n est un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = x + n(1 + \ln x)$$

1) a- Dresser le tableau de variations de la fonction f_n.

b- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists! \alpha_n \in]0; +\infty[)$; $f_n(\alpha_n) = 0$

2) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\frac{1}{e^2} < \alpha_n < \frac{1}{e}$

b- Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est convergente puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.

Exercice 22 n est un entier naturel supérieur ou égal à 2

On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f_n(x) = nx^2 + \ln(x)$$

1) Montrer que : $(\forall n \geq 2); (\exists! \alpha_n \in]0;+\infty[)\ ;\ f_n(\alpha_n) = 0$

2) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante, puis en déduire qu'elle est convergente.

3) a- Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ;\ x - \frac{1}{2}\ln(x) > 0$

b- Montrer que : $(\forall n \geq 2)\ ;\ \alpha_n < n^{-\frac{1}{4}}$, puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.

c- Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = 1$

Exercice 23 n est un entier naturel.

On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f_n(x) = x - n\ln(x)$$

1) Montrer que si : $n \geq 3$ alors l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement 2 solutions a_n et b_n telles que : $0 < a_n < n < b_n$.

2) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

3) a- Montrer que : $(\forall n \geq 3)\ ;\ 1 < a_n < 2$

b- Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 3}$ est décroissante, puis en déduire qu'elle est convergente.

c- Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$

Exercice 24

Soit n est un élément de $\mathbb{N}^* - \{1\}$, on considère la fonction f_n définie sur $]0;+\infty[$ par : $f_n(x) = -x^2 + 2 + n\ln(x)$

1. a- Calculer : $\lim_{x\to 0^+} f_n(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$.

   b- Étudier les variations de f_n.

2. On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x\ln x + 2 - x$

   a- Calculer $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$; puis étudier les variations de g.

   b- En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); g(x) > 0$

3. a- Montrer que : $f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) > 0$

   b- En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions u_n et v_n dans $\mathbb{R}_+^*$ (On suppose que : $u_n < v_n$).

   c- Calculer : $\lim_{n\to+\infty} v_n$

4. a- Montrer que : $(\forall n \geq 2); u_n \leq 1$

   b- Vérifier que : $(\forall n \geq 2); f_{n+1}(u_n) = \ln(u_n)$

   c- Montrer que $(u_n)_{n\geq 2}$ est croissante et convergente.

   d- Calculer : $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 25

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right); x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Et soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. a- Montrer que la fonction f est continue à droite en $x_0 = 0$.

   b- Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en $x_0 = 0$, et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

   c- Montrer que : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. Soit u et v les fonctions définies sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $u(t) = t - \ln(1+t)$ et $v(t) = t^2$

   a- Montrer que : $(\forall t > 0); (\exists c \in]0;t[); \frac{u(t)}{v(t)} = \frac{u'(c)}{v'(c)}$
   Appliquer le théorème de Rolle sur l'intervalle $[0;t](t > 0)$ à la fonction

:
$\varphi : x \mapsto u(t)v(x) - u(x)v(t)$

b- En déduire que : $\lim_{t\to 0^+} \frac{t-\ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{2}$

3. Montrer que la droite d'équation : $y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$.

4. a- Montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et que :

$$(\forall x \in]0;+\infty[) \ ; \ f'(x) = x\left(2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right)$$

   b- Montrer que : $(\forall x > 0)$; $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > \frac{1}{1+x}$
   En déduire que : $f'(x) > 0$ pour tout réel x de $]0;+\infty[$.

   c- Dresser le tableau de variations de la fonction f.

5. a- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

   b- Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en $\ln(2)$ et calculer $(f^{-1})'(\ln 2)$.

   c- Montrer que : $\lim_{x\to 0^+} \frac{f^{-1}(x)}{x} = +\infty$

   d- Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $f^{-1}(x) > x$

6. Tracer dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, la courbe $(\mathcal{C})$ et la courbe $(\mathcal{C}')$ de f^{-1}.

Exercice 26

A/ 1) Montrer que :

$$(\forall x > -1) \ ; \ x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(x+1)} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

2) Montrer que : $\lim_{x\to 0} \frac{x-\ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

B/ On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-1;+\infty[$ **par :**

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)} \ ; \ x \neq -1 \text{ et } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \text{ et } f(-1) = 0 \end{cases}$$

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. a- Montrer que la fonction f est continue sur l'intervalle $[-1;+\infty[$.

   b- Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en -1 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

   c- Montrer que la fonction f est dérivable en 0, puis déterminer une équation de tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point $A(0;1)$.

2. a- Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, donner une interprétation géométrique.

   ...au résultat obtenu.

b- Montrer que la fonction f est dérivable sur les intervalles $]-1;0[$ et $]0;+\infty[$ puis calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]-1;0[\cup]0;+\infty[$.

3) a- Montrer que : $(\forall x > -1)$; $(x+1)\ln(x+1) - x \geq 0$

b- Dresser le tableau de variations de la fonction f.

c- Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.

4) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = e \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > e - 1$

b- Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

c- Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e - 1$.

Exercice 27

I/ On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = -x\ln(x) + 2x - 2$$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) Montrer que g est strictement croissante sur $]0;e]$ et strictement décroissante sur $[e;+\infty[$.

3) a- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]e;+\infty[$ et que $4 < \alpha < 5$ (On donne : $\ln 2 < \frac{3}{4}$ et $\ln 5 > \frac{8}{5}$).

b- En déduire que g est positive sur $[1;\alpha]$ et négative sur $]0;1]$ et sur $[\alpha;+\infty[$ (Remarquer que : $g(1) = 0$).

II/ Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln^2(x)}{x-1} \ ; \ x \neq 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$

1) a- Montrer que f est continue en 1.

b- Montrer que f est dérivable en 1.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

3) a- Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[\setminus\{1\})$; $f'(x) = \dfrac{\ln(x)}{x(x-1)^2} \times g(x)$

b- Montrer que : $f(\alpha) = 4\left(\dfrac{\alpha - 1}{\alpha^2}\right)$

c- Montrer que : $f(\alpha) \in]0;1[$

d- Montrer que f est strictement croissante sur $]0;\alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha;+\infty[$.

III/ Soit F la fonction primitive de f sur $]0;+\infty[$ telle que : $F(\alpha) = \alpha$.

1) Montrer que F est strictement décroissante sur $]0;1]$ et strictement …

croissante sur $[1;+\infty[$.

2) Montrer que : $(\forall x \in]0;\alpha])$; $F(x) \geq x$

3) Montrer que : $(\exists c \in]1;\alpha[)$; $\alpha - F(1) = f(c)(\alpha - 1)$

4) On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = c$ et pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = F(u_n)$

   a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $c \leq u_n \leq \alpha$

   b- Montrer que la suite (u_n) est croissante, en déduire qu'elle est convergente.

   c- En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que : $(\forall (x,y) \in ([c;\alpha])^2)$; $|F(x) - F(y)| \leq f(\alpha)|x - y|$

   d- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_n - \alpha| \leq (f(\alpha))^n(\alpha - c)$
   En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 28

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^n \ln(x); x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

Soit $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a- Montrer que la fonction f_n est dérivable à droite en 0.

   b- Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_n(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a- Calculer $f_n'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f_n.

   b- Étudier la position relative des courbes $(\mathcal{C}_n)$ et $(\mathcal{C}_{n+1})$.

   c- Tracer, dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, les courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ en précisant la tangente au point O et la tangente au point $A(1;0)$.

3) a- Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, il existe un unique réel x_n dans l'intervalle $]0;+\infty[$ tel que : $f_n(x_n) = 1$.

b- Montrer que : $(\forall n \geq 2)$; $f_{n+1}(x_n) > 1$

c- En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante et qu'elle est convergente.

4) On pose : $b_n = x_n^n$ pour tout $n \geq 2$.

a- Montrer que : $(\forall n \geq 2)$; $b_n \ln(b_n) = n$

b- Montrer que : $(\forall x \in [1; +\infty[)$; $x - 1 \leq x \ln(x)$

c- En déduire que : $(\forall n \geq 2)$; $1 < b_n \leq n + 1$

5) a- Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$

b- Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 1$

Exercice 29

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x}(\ln(x))^2 \ ; \ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Et soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a- Montrer que la fonction f est continue à droite en $x_0 = 0$.

2. b- Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

puis donner la nature de la branche infinie de la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$.

3. a- Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en $x_0 = 0$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

4. b- Montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$, et que :

$$(\forall x \in]0; +\infty[) \ ; \ f'(x) = \frac{\ln(x)(\ln(x) + 4)}{2\sqrt{x}}$$

5. c- Dresser le tableau de variations de la fonction f.

6. d- Montrer que : $(\forall x \in [0;1])$; $0 \leq f(x) \leq \left(\frac{4}{e}\right)^2$

7. a- Montrer que : $f''(x) = \frac{1}{4x\sqrt{x}}(8 - (\ln x)^2)$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

8. b- Étudier la concavité de la courbe $(\mathcal{C})$ et montrer qu'elle admet deux points d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

9. Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

   a- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et calculer $(g^{-1})'(\sqrt{e})$

   b- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists! \alpha_n \in]0;+\infty[)$; $g^{-1}(\alpha_n) = \frac{1}{n} + e$

   c- Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

   d- Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \sqrt{e}$.

Exercice 30

I/ On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x(1+\ln^2(x)) \ ; \ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. a- Montrer que la fonction f est continue sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

2. b- Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 et donner une interprétation graphique du résultat obtenu.

3. c- Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$

   puis déterminer la nature de la branche infinie de la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$.

4. a- Montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et que : $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $f'(x) = (1+\ln(x))^2$

5. b- Dresser le tableau de variations de la fonction f.
6. c- Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1.
7. d- Montrer que : $f([e^{-1};1]) \subset [e^{-1};1]$
8. a- Étudier la concavité de la courbe $(\mathcal{C})$ et déterminer ses points d'inflexion s'ils existent.
9. b- Étudier la position relative de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$.
10. a- Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
11. b- Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ et la courbe (Γ) de f^{-1}.
12. Soit a et b deux nombres réels tels que : $e^{-1} < a < b$.
    Montrer que : $-1+\ln^2(ea) < \frac{b\ln^2(b)-a\ln^2(a)}{b-a} < -1+\ln^2(eb)$

II/ On considère la suite (u_n) définie sur :

$$\begin{cases} u_0 = e^{-1} \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ e^{-1} \leq u_n < 1$ (image_79ba13.jpg)
2. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante et en déduire qu'elle est convergente.
3. Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

Exercice 31

On considère la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x} \ ; \ x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Partie 1:

1. Montrer que f est continue sur $]-1;+\infty[$.

2. Soit k un nombre réel tel que : $|k| \leq \frac{1}{2}$ et g définie sur $I = [-|k|; |k|]$ par :
$g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$

   a- Montrer que g est dérivable sur I et que : $(\forall x \in I)$; $g'(x) = \frac{x^2}{1+x}$

   b- En déduire que : $(\forall x \in I)$; $|g'(x)| \leq 2k^2$

   c- Montrer que : $\left|\ln(1+k) - k + \frac{k^2}{2}\right| \leq 2|k^3|$

3. Montrer que la fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$

4. Calculer $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et donner une interprétation géométrique.

5. a- Montrer que : $(\forall x \in]-1; +\infty[)$; $\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x)$

6. b- Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $]-1; +\infty[$.

7. Tracer $(\mathcal{C}_f)$.

Partie 2: (image_79b79c.jpg) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que : $(\forall t \in]-1; +\infty[)$; $(1+t)^n \geq 1 + nt$

2. On pose : $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ et $v_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$

   a- Montrer que : $\ln(u_n) = f\left(\frac{1}{n}\right)$

   b- Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est croissante.

   c- Montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ est décroissante, en déduire qu'elle est convergente.

3. a- Montrer que : $(\forall n \geq 2)$; $0 \leq v_n - u_n \leq \frac{v_n}{n}$

4. b- En déduire que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

5. On pose L la limite commune.

   a- Montrer que : $L \geq \frac{9}{4}$

   b- Déterminer la valeur de L.

Exercice 32

On considère la fonction g définie sur $[-\frac{1}{2};+\infty[$ par :
$$\begin{cases} g(x) = 2x - (1+2x)\ln(1+2x) \ ; \ x \neq -\frac{1}{2} \\ g(-\frac{1}{2}) = -1 \end{cases}$$

1. a- Montrer que la fonction g est continue à droite en $-\frac{1}{2}$.
2. b- Étudier la dérivabilité de g à droite en $-\frac{1}{2}$, puis interpréter graphiquement.
3. c- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x}$.
4. a- Montrer que la fonction g est dérivable sur $]-\frac{1}{2};+\infty[$.
5. b- Dresser le tableau de variations de la fonction g.
6. c- Tracer la courbe $(\mathcal{C})$. (image_79b525.jpg)
7. Soit h la restriction de la fonction g sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
   - a- Montrer que h réalise une bijection de $[0;+\infty[$ vers $]-\infty;0]$.
   - b- Montrer que h^{-1} est dérivable sur $]-\infty;0[$.
   - c- Étudier la dérivabilité de h^{-1} à gauche en 0.
   - d- Tracer la courbe de h^{-1}.
8. a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists! \alpha_n \in]-\infty;0[) \ ; \ h^{-1}(\alpha_n) = \frac{1}{n}$
9. b- Déterminer la monotonie de la suite (α_n), puis en déduire sa convergence.
10. c- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.

Partie 2: (image_79b525.jpg) On considère la fonction f définie sur $I =]-\frac{1}{2};+\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+2x)}{x} \ ; \ x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est continue en 0.

2. Soit a un réel non nul de I. On pose :
$h_a(x) = (\ln(1+2a) - 2a)x^2 - (\ln(1+2x) - 2x)a^2$

   a- Calculer $h_a(0)$, $h_a(a)$, puis justifier l'existence de b entre 0 et a tel que :
   $\frac{\ln(1+2a)-2a}{a^2} = \frac{-2}{1+2b}$

   b- En déduire que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -2$.

3. a- Montrer que f est dérivable sur $I \setminus \{0\}$ et que : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+2x)}$

4. b- Calculer $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. (image_79b2ae.jpg)

5. c- Montrer qu'il existe un réel unique $\alpha \in [1;2]$ tel que : $f(\alpha) = 1$

6. d- Tracer la courbe (Γ) (on prend $\alpha \simeq 1,3$)

Partie 3: (image_79b2ae.jpg)

1. On pose : $(\forall x \in I)$; $\varphi(x) = \ln(1+2x)$ et $J = [1;\alpha]$

   a- Montrer que φ est dérivable sur I et : $(\forall x \geq 1)$; $0 < \varphi'(x) \leq \frac{2}{3}$

   b- Vérifier que : $\varphi(\alpha) = \alpha$ et que : $\varphi(J) \subset J$

2. Soit (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \ln(1+2u_n)$.

   a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \in J$

   b- Montrer que : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$

   c- Montrer que : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

   d- Déterminer la limite de la suite (u_n).