Exercices d'application

Exercice 1

On pose : $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = -1 + 3i$ et $z_3 = 1 - i$
Écrire sous forme algébrique chacun des nombres suivants :
$z_4 = z_1 + z_2 + z_3$, $z_5 = z_1 - 3z_2$, $z_6 = iz_1^2$, $z_7 = -iz_3^3$, $z_8 = z_1 \times z_2$, $z_9 = z_2^4$, $z_{10} = \dfrac{1}{z_2}$ et $z_{11} = \dfrac{z_1}{z_3}$

Exercice 2

Déterminer les valeurs du nombre réel λ pour que le nombre $z = (\lambda + i)(\lambda + 5 - i(\lambda - 7))$ soit un imaginaire pur.

Exercice 3

On pose : $A(z) = z^2 + 2z + 2$ avec $z \in \mathbb{C}$.

1) Écrire sous forme algébrique chacun des nombres suivants : $A(i)$; $A(1+i)$ et $A(2i-3)$.
2) On pose : $z = x + yi$ avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$.
   a) Déterminer, en fonction de x et y, les nombres $\mathrm{Re}(A(z))$ et $\mathrm{Im}(A(z))$.
   b) Montrer que : $A(z) \in \mathbb{R} \iff (x = -1 \text{ ou } y = 0)$

Exercice 4

On pose : $S_n = 1 + i + i^2 + \cdots + i^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $S_n - iS_n = 1 - i^{n+1}$.
   b) En déduire que : $S_n = \dfrac{1 - i^{n+1}}{1 - i}$
2) Déterminer la valeur de S_n dans chacun des cas suivants :
   $n = 4p$; $n = 4p + 1$; $n = 4p + 2$ et $n = 4p + 3$ avec $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 5

Soit z un nombre complexe.
Écrire en fonction de z et $\overline{z}$ le conjugué de chacun des nombres complexes suivants :
$Z_1 = iz + 1$; $Z_2 = z^2 + i\overline{z} - 5$; $Z_3 = (3\overline{z} - 1)(z + i)$; $Z_4 = \dfrac{2z - i}{1 - \overline{z}}$; avec $z \neq 1$.

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $(1 - i\overline{z})(z^2 + 2z + 1)(z - \overline{z}) = 0$
2) $2z + i\overline{z} = 5 - 4i$
3) $\dfrac{2\overline{z} - 1}{z + i} = 1 + i$
4) $\dfrac{\overline{z} + i}{z - 2} = \dfrac{z - i}{z + 1}$

Exercice 7

Soit z un nombre complexe.

1) a) Montrer que le nombre $A = z^2 - \overline{z}^2$ est un imaginaire pur.
   b) Montrer que le nombre $B = z^n + (\overline{z})^n$ est un réel pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$, et $a \in \mathbb{R}^*$, on pose :
   $X = (1+ia)^n + (1-ia)^n$
   $Y = (a+i)^n - (a-i)^n$
   a) Montrer que X est un réel.
   b) Montrer que Y est un imaginaire pur.

Exercice 8

Soit $z \in \mathbb{C}$.
On pose : $A(z) = z^2 + 2z + 2$
Montrer que : $(A(z) \in \mathbb{R}) \iff (z \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathrm{Re}(z) = -1)$

Exercice 9

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.
Montrer que : $\dfrac{2z-1}{z^2} \in \mathbb{R} \iff (z = \overline{z} \text{ ou } z + \overline{z} = 2z\overline{z})$

Exercice 10

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives :
$z_A = 3 + 2i$; $z_B = -2 + 5i$ et $z_C = -5 + 2i$.

1) Placer les points A, B et C.
2) Déterminer l'affixe de chacun des vecteurs : $\vec{AB}$; $\vec{AC}$ et $\vec{BC}$.
3) a) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.
   b) Déterminer l'affixe du centre I de ce parallélogramme.
4) Déterminer l'affixe du point G barycentre des points $(A, 2)$; $(B, 3)$ et $(C, -1)$.

Exercice 11

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
Soit z un nombre complexe non nul.
On considère les points $M(z)$; $N(\overline{z})$; $P(-z)$ et $Q(-\overline{z})$.

1) Quelle est la nature du quadrilatère $MNPQ$?
2) Donner, en fonction de z l'affixe du point K défini par : $2\vec{MK} - 3\vec{KN} + \vec{PM} = 5\vec{OP}$.

Exercice 12

Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants :
$z_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \qquad z_2 = -\sqrt{3} + 2i$
$z_3 = \cos\theta + i\sin\theta$ avec $\theta \in \mathbb{R} \qquad z_4 = z_1 \times z_2$
$z_5 = z_3^{2020}$; $z_6 = \dfrac{1}{z_4}$; $z_7 = \dfrac{z_2}{z_1}$; $z_8 = \overline{z_1} \times (-z_2)^3 \times \overline{z_3}^2$

Exercice 13

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$.
Déterminer les ensembles suivants :
$E_1 = \{M(z)/|z + 3i + 2| = |1 + i|\}$
$E_2 = \{M(z)/|\overline{z} - 1 + 2i| = |z + 1 - i|\}$
$E_3 = \{M(z)/|z + \overline{z}| = |z|\}$
$E_4 = \{M(z)/(z - 2i)(\overline{z} + 2i) = 9\}$
$E_5 = \{M(z)/|z - 2 + i| \leq 2\}$
$E_6 = \{M(z)/\dfrac{z + i}{z - i} \in i\mathbb{R}\}$
$E_7 = \{M(z)/\dfrac{z - 2 + i}{z + 1 - 3i} \in \mathbb{R}\}$

Exercice 14

Soit z un nombre complexe tel que : $\overline{z} \neq z$.
Soit u un nombre complexe de module 1 tel que : $u \neq 1$.
Montrer que : $\dfrac{z - u\overline{z}}{1 - u}$ est un réel.

Exercice 15

Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que :
$|z_1| = |z_2| = 1$ et $z_1 \times z_2 \neq -1$
On pose : $Z = \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$
Montrer que Z est un réel.

Exercice 16

Montrer que : $\forall (z_1; z_2) \in \mathbb{C}^2$; $|z_1|^2 + |z_2|^2 = \dfrac{1}{2}(|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2)$

Exercice 17

Montrer que : $(\forall z \in \mathbb{C})$; $\dfrac{|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$

Exercice 18

Montrer que : $(\forall z \in \mathbb{C})$; $|z| \leq 1 \implies \mathrm{Re}(3 + 4z + z^2) \geq 0$

Dans tous les exercices suivants, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

Exercice 19

Donner un argument de chacun des nombres suivants :

$z_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $z_2 = -\sqrt{7}$; $z_3 = i$

$z_4 = -\dfrac{i}{5}$; $z_5 = i^{2019}$; $z_6 = 1 + i$

$z_7 = 1 - i$; $z_8 = \sqrt{3} - i$; $z_9 = -1 - \sqrt{3}i$

$z_{10} = z_8 \times z_9$; $z_{11} = \dfrac{z_7}{z_8}$; $z_{12} = z_7^{2020}$

Exercice 20

Soit A, B et C les points d'affixes respectives :
$a = 1 + 3i$; $b = 7 - i$ et $c = 5 + 9i$.

1) Montrer que : $\dfrac{c-a}{b-a} = i$
2) En déduire la nature du triangle ABC.

Exercice 21

Écrire sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants :

$z_1 = \sqrt{3} + i$; $z_2 = -2\sqrt{3}i - 2$; $z_3 = (i - \sqrt{3})(1 - \sqrt{3} + (\sqrt{3} - 1)i)$

$z_4 = \dfrac{2 + \sqrt{3} + (2\sqrt{3} + 3)i}{2 - \sqrt{2} + (2 - \sqrt{2})i}$; $z_5 = \left(\dfrac{1}{2} - \sqrt{3} - \dfrac{1 - 2\sqrt{3}}{2}i\right)^{2020}$

Exercice 22

On considère le nombre complexe $z = \sqrt{2 - \sqrt{3}} - i\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

1) Calculer z^2 puis $|z^2|$ et $\arg(z^2)$.
2) En déduire une forme trigonométrique de z.
3) En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$ puis celles de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.
4) Construire les points A, B et C d'affixes respectives z ; $-z$ et z^2.

Exercice 23

On pose : $\alpha = -\sqrt{2 + \sqrt{3}} - i\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

1) Calculer α^2 puis en déduire $|\alpha|$ et $\arg(\alpha)$.
2) Déterminer chacun des ensembles suivants :
   $E_1 = \{M(z)/i\alpha z \in \mathbb{R}^+\}$; $E_2 = \{M(z)/\alpha^2 z \in i\mathbb{R}\}$

Exercice 24

Mettre sous forme exponentielle chacun des nombres suivants :

1) $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}\right)$
2) $z_2 = 3\left(-\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right)$
3) $z_3 = \sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{9} - i\sin\frac{\pi}{9}\right)$
4) $z_4 = -\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{11} + i\sin\frac{\pi}{11}\right)$
5) $z_5 = \frac{3}{2}i$
6) $z_6 = -7$
7) $z_7 = 2 + 2i$
8) $z_8 = -\sqrt{3} - 3i$

Exercice 25

Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe z dans chacun des cas suivants :

1) $z = \dfrac{-2}{\sqrt{3}+i}$
2) $z = \dfrac{2+2i}{\sqrt{3}+i}$
3) $z = (1-\sqrt{3}i)^{2016}$
4) $z = (3-\sqrt{3}i)(-1+i)$
5) $z = i(1+\sqrt{3}i)(-1-i)^3$
6) $z = \dfrac{\sqrt{3}-i}{(-2+2i)^2}$

Exercice 26

I- 1) Montrer que :

a) $(\forall \alpha \in \mathbb{R})$; $1 + e^{i\alpha} = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}$

b) Montrer que : $(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2)$; $e^{ia} + e^{ib} = 2\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}$

$(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2)$; $e^{ia} - e^{ib} = 2i\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}$

II- On pose : $u = 1 + i\sqrt{3}$ et $v = \sqrt{2}(1+i)$

1) Écrire sous forme exponentielle les nombres u et v
2) On pose $t = (\sqrt{2}+1) + i(\sqrt{2}+\sqrt{3})$
   Écrire t sous forme exponentielle.

III- Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \left]-\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right[$

On pose : $z = re^{i\theta}$

Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe $Z = z - e^{i\frac{\pi}{3}}\overline{z}$

Exercice 27

1) Soit x un nombre réel tel que $0 < x < 2\pi$
Déterminer, suivant les valeurs de x, une forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :
$Z_1 = 1 + \cos x + i \sin x$; $Z_2 = 1 - \cos x + i \sin x$; $Z_3 = 1 - \sin x + i \cos x$ **2) Application**
Écrire chacun des nombres complexes suivants sous forme trigonométrique

$$z_1 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad ; \quad z_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad ; \quad z_3 = 2 + \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

3) Soit θ un nombre réel tel que : $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$
Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe : $X = \frac{\tan\theta}{1+i\tan\theta}$

Exercice 28

Soit α un réel de l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{4}\right[$.
On pose : $Z = \dfrac{1 + \cos\alpha + i\sin\alpha}{\sqrt{1+\sin(2\alpha)} + i\sqrt{1-\sin(2\alpha)}}$
Déterminer $|Z|$ et $\arg(Z)$

Exercice 29

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$
On pose : $u = e^{i\frac{\pi}{n}}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

1) Calculer $T = \sum_{k=0}^{n-1} u^k$
2) En déduire que : $S_n = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$

Exercice 30

Linéariser chacune des expressions suivantes :
$f(x) = \sin^3(x)$; $g(x) = \cos^3(x) \times \sin^2(x)$

Exercice 31

1) Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $a = 4(-1 + i\sqrt{3})$
2) Déterminer les racines quatrièmes du nombre complexe $b = 8\sqrt{2}(1 + i)$

Exercice 32

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 = 4\sqrt{2}(-1 + i)$ et écrire les solutions sous forme algébrique.
2) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

Exercice 33

Déterminer les racines carrées de chacun des nombres complexes suivants :
$z_1 = -\frac{1}{2}$; $z_2 = \frac{\pi}{4}$; $z_3 = 2i$; $z_4 = -2i$
$z_5 = -5 - 12i$; $z_6 = 1 + 2\sqrt{2}i$; $z_7 = -1 - 4\sqrt{3}i$; $z_8 = \frac{73}{36} - \sqrt{2}i$

Exercice 34

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
$(E_1) : z^2 - 2z + 2 = 0$
$(E_2) : z^2 + (3+4i)z - 1 + 5i = 0$
$(E_3) : z^2(1 - z^2) = 16$
$(E_4) : z^2 - 2(1+\cos\alpha)z + 2(1+\cos\alpha) = 0$
$(E_5) : z + 3\overline{z} = (2 + i\sqrt{3})|z|$

Exercice 35

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
   $(E_1) : z^3 + (1+2i)z^2 + (-1+5i)z - 2i - 6 = 0$ sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
   $(E_2) : z^3 + 2(1+i)z^2 + (-6+5i)z - 9 - 3i = 0$ sachant qu'elle admet une solution réelle.
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
   $(E_3) : z^4 - 2(1-i)z^3 - 4z^2 - 2(1+9i)z + 15 = 0$ sachant qu'elle admet une solution réelle et une solution imaginaire pure.

Exercice 36

1) Déterminer les racines $7^{\text{ième}}$ de l'unité
2) On pose : $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$; $u = z + z^2 + z^4$ et $v = z^3 + z^5 + z^6$
   a) Montrer que les nombres complexes u et v sont conjugués
   b) Montrer que $\mathrm{Im}(u) > 0$
   c) Calculer $u + v$ et $u \times v$
   d) En déduire la valeur de u et de v
   e) En utilisant les questions précédentes, déterminer la valeur de chacune des sommes :
      $s = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7}$ et $S = \sum_{k=4}^{10} \sin\left(\frac{2k\pi}{7}\right)$

Exercice 37

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$

1) Déterminer dans chacun des cas suivants :
   La nature de la transformation f qui transforme tout point M d'affixe z en un point M' d'affixe z' tel que :
   a) $z' = z - 1 + 3i$
   b) $z' = \frac{5}{2}z + 6i - 3$
   c) $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + 1 - \sqrt{3}i$

d) $z' = -z$
e) $z' = \overline{z}$
f) $z' = -\overline{z}$

2) Soit S la transformation qui, à tout point $M(z)$ associe $M'(z')$ tel que :

$$z' = i\overline{z} - 1 + i$$

a) Montrer que l'ensemble des points invariants par la transformation S est une droite (D) dont on déterminera une équation.
b) Montrer que : ((D) est la médiatrice de $[MM']$) $\iff$ $S(M) = M'$
en déduire la nature de la transformation S.

Exercice 38

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$
On considère l'application F qui à tout $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que :
$z' = u^2z + u - 1$ où u est un nombre complexe.

1) Déterminer l'ensemble E_1 des valeurs de u pour lesquelles F est une translation.
2) Déterminer l'ensemble E_2 des valeurs de u pour lesquelles F est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.
3) Déterminer l'ensemble E_3 des valeurs de u pour lesquelles F est une homothétie de rapport -2
4) On pose : $u = 1 - i$
Montrer que F est la composé d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et une homothétie que l'on déterminera.

Exercices de synthèse

Exercice 39

Soit F l'application définie sur $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ par : $F(z) = \dfrac{iz-1}{z-i}$.

1) a) Vérifier que : $(\sqrt{3} - i\sqrt{3})^2 = -6i$.
b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $F(z) = iz$.
c) Écrire les solutions de cette équation sous forme trigonométrique.
d) Soit A et B les points images des solutions de (E), dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$.
Montrer que les points O, A et B sont alignés.

2) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$.
a) Montrer que : $F(z) = -\dfrac{z+\overline{z}}{|z-i|^2} + i\dfrac{z\overline{z}-1}{|z-i|^2}$.
b) En déduire que : $|z| = 1 \implies F(z) \in \mathbb{R}$.

Exercice 40

Soit $m \in \mathbb{C}^*$;
On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (3m - 2i)z + 2m^2 - 4mi = 0$; (E)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
2) On suppose dans cette question que $m = 1 + i$.
   Soit z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) telles que $|z_1| < |z_2|$.
   a) Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.
   b) Vérifier que $-3z_1$ est une racine cubique du nombre complexe z_2, puis en déduire les deux autres racines cubiques de z_2 sous forme algébrique.
3) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
   Soit A, B et C les points d'affixes respectives i ; $2m$ et $m - 2i$. On suppose que m n'est pas un imaginaire pur.
   a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   b) On construit à l'extérieur du triangle ABC le point D tel que le triangle BCD soit rectangle isocèle en D. Soit d l'affixe du point D.
      Montrer que : $d = \dfrac{3m - im + 2 - 2i}{2}$ ou $d = \dfrac{3m + im - 2 - 2i}{2}$
   c) Déterminer m pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un carré.

Exercice 41

Le plan complexe est muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Partie 1 :

1) Placer les points $A(-4-6i)$; $B(14)$; $C(-4+6i)$; $A_1(3-7i)$; $B_1(9+5i)$ et $C_1(-3-i)$.
2) Déterminer l'affixe de chacun des points I ; J et K milieux respectifs des segments $[AB]$; $[BC]$ et $[CA]$.
3) Montrer que les points A_1 ; I et B_1 sont alignés.
   On admet que les points B_1 ; J et C_1 sont alignés ainsi que les points C_1 ; K et A_1.
4) Déterminer une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{IB}, \vec{IB_1}})$.
   On admet que : $(\widehat{\vec{KA}, \vec{KA_1}}) \equiv (\widehat{\vec{JC}, \vec{JC_1}}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$
5) Quelle est l'image de la droite (AB) par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{4}$?

Partie 2 :

Soit f la transformation qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) z + 2 - 2i$

1) Déterminer $f(A)$; $f(B)$ et $f(C)$.
2) Montrer que la transformation f admet un point fixe Ω dont on déterminera l'affixe.
3) Soit r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$; et soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   Montrer que : $f = r \circ h$.

Exercice 42

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.
On considère les points $A(1)$; $A'(-1)$; $B(i)$ et $B'(-i)$.
À tout point $M(z)$ distinct de O ; A ; A' ; B et B', on associe les points $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ tels que : les triangles BMM_1 et AMM_2 soient rectangles isocèles et que :
$(\widehat{\vec{M_1B};\vec{M_1M}}) \equiv (\widehat{\vec{M_2M};\vec{M_2A}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

1) a) Vérifier que : $z - z_1 = i(i - z_1)$ et $1 - z_2 = i(z - z_2)$

   b) Vérifier que : $z_1 = \dfrac{1+i}{2}(z+1)$ et $z_2 = \dfrac{1-i}{2}(z+i)$

2) Dans cette question on cherche à déterminer les points M pour lesquels le triangle OM_1M_2 est isocèle.

   a) Montrer que : $OM_1 = OM_2 \iff |z+1| = |z+i|$
   En déduire l'ensemble des points M tels que $OM_1 = OM_2$ et construire cet ensemble.

   b) Montrer que : $OM_1 = M_1M_2 \iff |z+1|^2 = 2|z|^2$

   c) Montrer que : $|z+1|^2 = 2|z|^2 \iff |z-1|^2 = 2$
   En déduire l'ensemble des points M tels que $OM_1 = M_1M_2$ et construire cet ensemble.

   d) En déduire l'ensemble des points M pour lesquels le triangle OM_1M_2 est équilatéral et construire cet ensemble.

Exercice 43

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E) : z^2 - 4z + 8 = 0$

   b) Soit z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) telles que $\mathrm{Im}(z_1) > 0$.
   — Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.
   — Placer les points $A(z_1)$ et $B(z_2)$.

2) Soit f la transformation qui à tout point $M(z)$ (avec $z \in \mathbb{C}^*$) associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = \frac{1}{z}$.

   a) Déterminer l'affixe de chacun des points A' et B' tels que : $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.

   b) Montrer que pour tout point M distinct de O; les points O ; M et M' sont alignés et que : $OM' \times OM = 1$

3) a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $|z-2| = 2 \iff \left|\dfrac{1-2\overline{z'}}{z'}\right| = 2$
   En déduire que : $|z-2| = 2 \iff \left|\frac{1}{2} - z'\right| = |z'|$

   b) Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre $I(2)$ et de rayon 2
   — Montrer que $[AB]$ est un diamètre du cercle $(\mathcal{C})$
   — Montrer que $M \in (\mathcal{C}) \setminus \{O\}$ si et seulement si M' appartient à une droite (D) dont on donnera une équation.
   — Construire $(\mathcal{C})$ et (D).
   — En déduire une méthode géométrique pour construire M' image de M par la transformation f si $M \in (\mathcal{C}) \setminus \{O\}$.

Exercice 44

Partie 1 : Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose : $P(z) = z^3 - (4-i)z^2 + 4(2-i)z + 8i$

1) a) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.

   b) Déterminer les nombres réels b et c tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z+i)(z^2+bz+c)$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Partie 2 :
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$

1) Construire les points A ; B et C d'affixes respectives $2+2i$; $2-2i$ et $-mi$ où $m \in \mathbb{R}^*$ (pour placer le point C, prendre $m = 1$)
2) Déterminer en fonction de m l'affixe du point C' symétrique du point C par rapport à B.
3) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   Déterminer, en fonction de m, l'affixe de chacun des points K et H images respectives des points C et C' par la rotation R.
4) Soit t la translation de vecteur $\vec{W}(4i)$.
   On pose $t(C) = N$ et $t(C') = L$.
   Déterminer en fonction de m les affixes z_N et z_L des points N et L (respectivement).
5) a) Montrer que A est le milieu des segments $[LN]$ et $[KH]$.

   b) Montrer que : $\dfrac{z_H - z_A}{z_L - z_A} = i$

   c) En déduire la nature du quadrilatère $KLHN$.

Exercice 45

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives :
$a = -1 + i\sqrt{3}$; $b = -1 - i\sqrt{3}$ et $c = 2$.

1) a) Vérifier que : $\dfrac{b-c}{a-c} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

   b) En déduire la nature du triangle ABC.

2) Déterminer le centre et le rayon du cercle $(\mathcal{C})$ circonscrit au triangle ABC.
3) Soit (Γ) l'ensemble des points $M(z)$ tels que : $2(z + \overline{z}) + z \times \overline{z} = 0$.

   a) Montrer que (Γ) est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

   b) Vérifier que les points A et B appartiennent à (Γ).

4) Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

   a) Déterminer l'image du point B par la rotation r.

   b) Construire le point C_1 image du point C par la rotation r puis déterminer l'affixe de C_1.

Exercice 46

On considère la suite complexe (z_n) définie par :

$$\begin{cases} z_0 = 1 \\ z_{n+1} = \left(\dfrac{3}{4} + i\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right) z_n \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On note A_n le point d'affixe z_n.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $d_n = |z_{n+1} - z_n|$
   a) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $z_{n+1} - z_n = \left(\dfrac{3}{4} + i\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)(z_n - z_{n-1})$
   b) En déduire d_n en fonction de n.
   c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $L_n = \sum_{k=0}^{n} A_k A_{k+1}$
      — Exprimer L_n en fonction de n.
      — Calculer $\lim_{n \to +\infty} L_n$.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $a_n \equiv \arg(z_n)[2\pi]$.
   a) Déterminer a_{n+1} en fonction de a_n.
   b) En déduire a_n en fonction de n.
   c) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles les points O, A_0 et A_n sont alignés.

Exercice 47

Partie 1 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{e_1}; \vec{e_2})$
On considère l'application t définie par : $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$t : z \longmapsto z^2 + z + 1$$

1) Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tel que $t(z)$ soit un réel.
2) Soit z un nombre complexe.
   Soit M et M' les points d'affixes z et $t(z)$ respectivement.
   Déterminer l'ensemble F des points $M(z)$ tel que les points O, M et M' sont alignés.

Partie 2 :

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E) : z^2 + z + 1 = 0$.
   b) Soit u et v les solutions de l'équation (E).
      Vérifier que : $(\forall (n; m) \in \mathbb{N}^2)$; $u^{3m} = v^{3m} = 1$ et $(1+u)^{6n} = (1+v)^{6n}$
2) Soit z un nombre complexe tel que :

$$\exists (p; q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \ ; \ (1+z)^q = 1 \text{ et } z^p = 1.$$

   a) Montrer que : $|z| = |1+z| = 1$
   b) Soit θ un argument de z tel que $-\pi < \theta < \pi$
      Montrer que : $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$, puis déterminer z.

Exercice 48

Soit ABC un triangle direct et M le milieu du segment $[BC]$.
Soit a ; b ; c et m les affixes respectives des points A ; B ; C et M.
On construit deux triangles BAB' et $C'AC$ rectangles isocèles en A (voir figure).
Soit b' et c' les affixes respectives des points B' et C'.
L'objectif de l'exercice est de prouver que $(AM) \perp (B'C')$.

1) a) Déterminer b' et c' en fonction de a, b et c.
   b) Déterminer m en fonction de b et c.
2) a) Écrire $c' - b'$ en fonction de a et m.
   b) En déduire que : $B'C' = 2AM$ et que les droites $(B'C')$ et (AM) sont perpendiculaires.

Exercice 49

Soit ABC un triangle direct. On construit à l'extérieur de ce triangle trois triangles équilatéraux directs $AC'B$, $BA'C$ et $CB'A$ (voir figure).
Soit a ; b ; c ; a' ; b' et c' les affixes respectives des points A ; B ; C ; A' ; B' et C'.

1) Déterminer a' en fonction de b et c.
   Puis calculer b' et c' en fonction de a, b et c.
2) Montrer que : $a' - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(aj + b + cj^2)$
   Calculer de même $b' - b$ et $c' - c$; où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
3) a) Montrer que : $AA' = BB' = CC'$
   b) Montrer que les triangles $A'B'C'$ et ABC ont le même centre de gravité.

Exercice 50

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
On considère les points $A(a)$; $B(b)$ et $C(c)$ tels que : a et b sont des nombres complexes non nuls et $c = -b$.

1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que les points A, B et C soient alignés.
2) Dans cette question, on suppose que les points A ; B et C ne sont pas alignés, et que $(\widehat{\vec{AB}; \vec{AC}})$ est une base directe.
   On construit à l'extérieur du triangle ABC les carrés $AFGB$ et $ACDE$ et le parallélogramme $AEHF$. (voir figure)
   tels que les deux bases $(\widehat{\vec{AC}; \vec{AE}})$ et $(\widehat{\vec{AF}; \vec{AB}})$ soient directes.
   a) Soit r la rotation de centre A qui transforme C en E.
      Montrer que : $e = -ib + a(1 - i)$ où e est l'affixe du point E.
   b) Soit α ; β et γ les affixes respectives des points D ; H et F.
      Déterminer α ; β et γ en fonction de a et b.
   c) En déduire que : $EF = 2.OA$; $(EF) \perp (OA)$; $BD = CH$ et $(BD) \perp (CH)$.

Exercice 51

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.
On considère les points B ; C ; D et E d'affixes respectives $b=1-i$; $c=-1-i$; $d=-1-3i$ et $e=1-3i$.

1) Vérifier que : $(\widehat{\vec{BC};\vec{BE}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et que le quadrilatère $BCDE$ est un carré.
2) Calculer $|b|$; $|c|$; $|d|$ et $|e|$.
3) Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O passant par le point B.
   Donner une équation du cercle $(\mathcal{C})$.
4) Soit Q un autre point de $\mathcal{C}$ tel que $Q\neq B$ et $Q\neq C$.
   On pose : $q=x+yi$ avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ où q est l'affixe du point Q.
   Soit F et G deux points du plan tels que le quadrilatère $QBFG$ soit un carré et $(\widehat{\vec{QB};\vec{QG}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.
   On pose : $z=\dfrac{g-q}{b-q}$ où g est l'affixe du point G.
   a) Donner une interprétation géométrique du module et d'argument de z.
   b) En déduire z.
5) a) Montrer que : $g=(1+x+y)+i(1-x+y)$.
   b) En déduire $|g|$ en fonction de x et y.
6) Exprimer $|z|$ en fonction de y seulement.
7) Montrer géométriquement que : $|g|=|f|$ où f est l'affixe du point F.
8) Déterminer les valeurs de x et y pour que les points E ; D ; G et F appartiennent au cercle de centre O et de rayon r à déterminer.

Exercice 52

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.
Soit A et B les points d'affixes respectives i et $-2i$.
Soit f la transformation qui à tout point M distinct de A et d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que : $z'=\dfrac{2z-i}{iz+1}$.

1) Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{i\}$. On pose : $z-i=re^{i\theta}$ où $r>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$.
   a) Donner une interprétation géométrique de r et θ.
   b) Montrer que : $(z'+2i)(z-i)=1$.
   c) On pose : $z'+2i=r'e^{i\theta'}$ où $r'>0$ et $\theta'\in\mathbb{R}$.
      Déterminer r' et θ' en fonction de r et θ et donner une interprétation géométrique de r' et θ'.
2) Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre A et de rayon 1.
   a) Montrer que si $M\in(\mathcal{C})$, alors le point M' appartient à un cercle $(\mathcal{C}')$ que l'on précisera.
   b) Le cercle $(\mathcal{C}')$ est-il image de $(\mathcal{C})$ par la transformation f ?
3) Soit N un point d'affixe $n=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)i$.
   a) Montrer que $N\in(\mathcal{C})$.
   b) Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u};\vec{AN}})$ puis construire $(\mathcal{C})$ et N.
   c) En déduire la construction du point $N'=f(N)$.

Exercice 53

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.
On pose : $\omega = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1) Montrer que : $1+\omega+\omega^2 = 0$ et $\overline{\omega} = \omega^2$.
2) On considère l'ensemble : $E = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = |1+z| = 1\}$
   a) Montrer que $\omega \in E$.
   b) Soit $z = x+yi$ un nombre complexe où x et y sont des nombres réels.
   Montrer que : $z \in E \iff \left(x = -\dfrac{1}{2} \text{ et } |y| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
   c) En déduire que : $E = \{\omega; \overline{\omega}\}$.
3) Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O et de rayon r.
   Soit $A(a)$; $B(b)$ et $C(c)$ trois points du cercle $(\mathcal{C})$.
   On suppose que O est le centre de gravité du triangle ABC.
   On pose : $p = \dfrac{b}{a}$ et $q = \dfrac{c}{a}$.
   a) Montrer que : $|p| = |q| = 1$ et $1+p = -q$.
   b) En utilisant la question 2) b), montrer que : $p = \omega$ ou $p = \overline{\omega}$.
   Dans la suite de l'exercice, on suppose que $p = \omega$.
   c) Montrer que :
$$\begin{cases} c-a = (\overline{\omega}-1)a \\ c-b = (\overline{\omega}-1)b \\ b-a = (\omega-1)a \end{cases}$$
   d) En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 54

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.
On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ) : $z^2 - 2z + \dfrac{1}{\cos^2\theta} = 0$
où θ est un paramètre réel de l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ).
   b) Soit z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E_θ) telles que $\mathrm{Im}(z_1) = \tan\theta$.
   Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.
2) Soit M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2.
   Montrer que le triangle OM_1M_2 est isocèle en O.
3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$
   On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^{2n} - 2z^n + \dfrac{1}{\cos^2\theta} = 0$
   Déterminer les solutions de l'équation (E) sous forme exponentielle.

Exercice 55

Partie 1 :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A ; B ; M et M' d'affixes respectives : 1 ; -1 ; z et Z, tels que $Z = \dfrac{z+1}{z-1}$ avec $z \in \mathbb{C}\backslash\{-1;1\}$.

1) Montrer que : $|z| = 1 \iff Z \in i\mathbb{R}$

2) On pose : $z = e^{i\theta}$ avec $-\pi < \theta < \pi$ et $\theta \neq 0$.

a) Montrer que : $Z = \dfrac{-i}{\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$ et en déduire $|Z|$ et $\arg(Z)$.

b) Montrer que : $(\widehat{\vec{M'A};\vec{M'B}}) \equiv \theta[2\pi]$, puis construire M et M' dans le cas où $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

Partie 2 :

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

On considère l'équation : $(E) : \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^n = \sqrt{2}$

1) Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :
$S = \{z_k; k \in \{0;1;2;\ldots;n-1\}\} \cup \{\overline{z_k}; k \in \{0;1;2;\ldots;n-1\}\}$
où $z_k = \dfrac{-i}{\tan(\theta_k)}$ avec $\theta_k = \dfrac{\pi}{8n} + \dfrac{k\pi}{n}$

2) On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme complexe :
$P(z) = \sqrt{2}(z^2-1)^n - (z+1)^{2n} - (z-1)^{2n}$; $z \in \mathbb{C}$.

a) Montrer que : $(E) \iff P(z) = 0$.

b) Montrer que : $P(z) = (\sqrt{2}-2)\prod_{k=0}^{n-1}\left(z^2 + \dfrac{1}{\tan^2(\theta_k)}\right)$.

En déduire la valeur du produit : $\prod_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{\tan^2\left(\dfrac{\pi}{8n} + \dfrac{k\pi}{n}\right)}$.

Exercice 56

Soit m un entier naturel non nul.

Soit $(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3;\ldots;\alpha_m) \in \mathbb{C}^m$.

On considère le polynôme : $P(z) = z^m + \alpha_m z^{m-1} + \alpha_{m-1}z^{m-2} + \cdots + \alpha_2 z + \alpha_1$ avec $z \in \mathbb{C}$.

Soit $z_1; z_2; \ldots; z_m$ les racines de $P(z)$.

1) Montrer que : $\prod_{k=1}^{m} z_k = (-1)^m P(0)$.

2) Soit $\theta \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
On considère l'application $P_{n,\theta}$ définie par :

$$\begin{aligned} P_{n,\theta} : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto (z+1)^n - e^{i2n\theta} \end{aligned}$$

a) Déterminer les solutions de l'équation $P_{n,\theta}(z) = 0$ et calculer le produit des solutions de cette équation.

b) On pose : $f_n(\theta) = \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \dfrac{k\pi}{n}\right)$

Montrer que : $f_n(\theta) = \dfrac{\sin(n\theta)}{2^{n-1}}$

Calculer $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{f_n(\theta)}{\sin\theta}$

c) En déduire la valeur du produit $\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right) \times \sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) \times \cdots \times \sin\left(\dfrac{(n-1)\pi}{n}\right)$.

Exercice 57

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 1$.
Pour tout $k \in \{1; 2; \ldots; n-1\}$, on pose : $u_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ et $v_k = e^{i\frac{k\pi}{n}}$.

1) Montrer que : $\prod_{k=1}^{n-1} v_k = (-1)^{n-1} \times (i)^{n-1}$.
2) a) Exprimer $u_k - 1$ en fonction de v_k.
   b) Calculer : $\prod_{k=1}^{n-1} (u_k - 1)$
   c) En déduire que : $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right) = \dfrac{n}{2^{n-1}}$

Exercice 58

Partie A :
On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante :

$$(E) : z^2 - (1+2i)z + 1 + 7i = 0$$

1) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta = (3-4i)^2$
2) Déterminer z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E).
   (On note z_1 la solution telle que $\mathrm{Re}(z_1) > 0$)
3) Montrer que : $\dfrac{z_2}{z_1} = \sqrt{2}.e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Partie B :
Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $a = 2 - i$ et $b = -1 + 3i$.
Soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, et soit T la translation qui transforme le point A au point O.

1) a) Soit c l'affixe du point C ; image du point A par la rotation R.
   Déterminer le nombre complexe c.
   b) Montrer que : $T(C) = B$
2) Soit D le point du plan complexe pour lequel $OCDB$ est un parallélogramme.
   Déterminer d l'affixe du point D et vérifier que le point C est le milieu du segment $[AD]$.
3) Montrer que le nombre $\left(\dfrac{a-d}{b-d}\right) \times \dfrac{b}{a}$ est réel puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Exercice 59

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(E) : z^2 - (1+i)z + 2 + 2i = 0$$

1) a) Vérifier que $(1-3i)^2$ est le discriminant de l'équation (E).
   b) Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ (on prendra z_1 le nombre complexe imaginaire pur).
   c) Montrer que : $\dfrac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.
On considère le point A d'affixe z_1 et le point B d'affixe z_2.
   a) Déterminer le nombre complexe e, affixe du point E milieu du segment $[AB]$.
   b) Soit r la rotation de centre A et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ et soit c l'affixe du point C image du point E par la rotation r. Montrer que : $c = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$.
   c) On considère D le point d'affixe $d = 1 + \frac{3}{2}i$. Montrer que le nombre $\frac{z_2 - d}{c - d} \times \frac{c - z_1}{z_2 - z_1}$ est réel puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Exercice 60

Partie A :

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + i = 0$.
(On note a la solution telle que : $\text{Re}(a) > 0$).
2) a) Déterminer le module et un argument de $1 + a$.
   b) En déduire que : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
   c) Vérifier que : $(1 + a)(1 - a) = 1 + i$ puis en déduire une forme trigonométrique de $1 - a$.

Partie B :
Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B, M et M' d'affixes respectives a, $-a$, z et z'. On suppose de plus que : $zz' + i = 0$

1) Soit N le point d'affixe $\overline{z}$ ($\overline{z}$ étant le conjugué de z).
Montrer que : $(ON) \perp (OM')$
2) a) Montrer que : $z' - a = i\left(\frac{z - a}{az}\right)$
   b) Montrer que si $z \neq -a$ alors $z' \neq -a$ et $\frac{z' - a}{z' + a} = -\left(\frac{z - a}{z + a}\right)$
3) On suppose que les points A, B, M ne sont pas alignés.
Montrer que le point M' appartient au cercle circonscrit au triangle ABM.

Exercice 61

Soit m un nombre complexe non nul.

Partie 1 :
On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation dans laquelle z est l'inconnue telle que :

$$(E) : z^3 + (2 - i)z^2 + (m^2 + 1 - 2i)z - i(1 + m^2) = 0$$

1) a) Vérifier que le nombre complexe i est une solution de (E) puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
   b) Déterminer sous la forme algébrique, les valeurs de m pour que le produit des solutions de l'équation (E) soit égal à 1.

2) On pose : $z_1 = -1 + im$, $z_2 = -1 - im$ et $m = e^{i\alpha}$ où $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$

Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

Partie 2 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On considère les points M, M_1 et M_2 d'affixes respectives : m , $z_1 = -1 + im$ et $z_2 = -1 - im$.

1) Déterminer l'ensemble des points $M(m)$ tels que les points M, M_1 et M_2 soient alignés.
2) On suppose que : $m\overline{m} + \mathrm{Re}(m) \neq 0$
   a) Soit R la transformation du plan complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = iz - 1$
   Montrer que R est une rotation dont on déterminera l'affixe de son centre Ω et une mesure de son angle.
   b) Montrer que : $\dfrac{z_2 - m}{z_2 - z_1} \in i\mathbb{R} \iff m\overline{m} - \mathrm{Im}(m) = 0$
   c) En déduire l'ensemble des points $M(m)$ pour lesquels les points Ω, M, M_1 et M_2 soient cocycliques.

Exercice 62 : Session Normale 2017

Soit m un nombre complexe non nul.

Partie I :

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) d'inconnue z :

$$(E) : 2z^2 - 2(m + 1 + i)z + m^2 + (1 + i)m + i = 0$$

1) Vérifier que le discriminant de l'équation (E_m) est $\Delta = (2im)^2$
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m)

Partie II :

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$

On suppose que $m \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, i\}$ et on pose :

$$z_1 = \frac{1+i}{2}(m+1) \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1-i}{2}(m+i)$$

On considère les points A, B, M, M_1, M_2 d'affixes respectives $1, i, m, z_1$ et z_2.

1) a) Vérifier que : $z_1 = iz_2 + 1$
   b) Montrer que M_1 est l'image de M_2 par la rotation de centre Ω d'affixe $\omega = \dfrac{1+i}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$
2) a) Vérifier que : $\dfrac{z_2 - m}{z_1 - m} = i\dfrac{m-1}{m-i}$
   b) Montrer que si les points M, M_1 et M_2 sont alignés, alors le point M appartient au cercle (Γ) dont l'un des diamètres est le segment $[AB]$.
   c) Déterminer l'ensemble des points M tels que les points Ω, M, M_1 et M_2 sont Cocycliques.
   (remarquer que : $\dfrac{z_1 - \omega}{z_2 - \omega} = i$)

Exercice 63 : Session de Rattrapage 2017

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$
Soit M le point d'affixe le nombre complexe non nul z et M' le point d'affixe $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

1) Déterminer le nombre complexe z tel que les deux points M et M' soient confondus.
2) On suppose que le point M est différent des deux points A et B d'affixes respectifs 1 et -1.
   Montrer que : $\frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$
3) Soit (Δ) la médiatrice du segment $[AB]$
   Montrer que : Si le point M appartient à (Δ), alors le point M' appartient à (Δ).
4) Soit (Γ) le cercle dont l'un des diamètres est le segment $[AB]$.
   Montrer que : Si le point M appartient à (Γ), alors le point M' appartient à (AB).

Exercice 64 : Session Normale 2018

Soit m un nombre complexe

Partie I :

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E_m) : z^2 + (im + 2)z + im + 2 - m = 0$$

1) a) Vérifier que $\Delta = (im - 2i)^2$ est le discriminant de l'équation (E_m)
   b) Donner, suivant les valeurs de m, l'ensemble des solutions de l'équation (E_m)
2) Pour $m = i\sqrt{2}$, écrire les deux solutions de l'équation (E_m) sous la forme exponentielle.

Partie II :

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$
On considère les points A, Ω, M et M' d'affixes respectives $a = -1 - i$, $\omega = i$, m et $m' = -im - 1 + i$

1) Soit R la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ qui transforme M en M'.
   a) Vérifier que Ω est le centre de la rotation R
   b) Déterminer l'affixe b de B, où B est le point tel que $A = R(B)$.
2) a) Vérifier que : $m' - a = \frac{\omega - a}{\omega - b}(m - b)$
   b) En déduire que les points A, M et M' sont alignés si et seulement si les points $A, B, \Omega,$ et M sont Cocycliques.
   c) Montrer que l'ensemble des points M tels que les points A, M et M' sont alignés est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 65 : Session de Rattrapage 2018

1) Pour tout nombre complexe non nul z différent de i on pose : $h(z) = i\left(\frac{z - 2i}{z - i}\right)$
   a) Vérifier que : $h(z) = z \iff z^2 - 2iz - 2 = 0$
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E) : z^2 - 2iz - 2 = 0$

2) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$
On désigne par a et b les solutions de l'équation (E) tel que $\mathrm{Re}(a) = 1$
Soit z un nombre complexe différent de i de a et de b et les points $M(z)$, $M'(h(z))$, $A(a)$ et $B(b)$.

a) Montrer que : $\dfrac{h(z)-a}{h(z)-b} = -\dfrac{z-a}{z-b}$

b) En déduire que : $(\widehat{\vec{M'B}; \vec{M'A}}) \equiv \pi + (\widehat{\vec{MB}; \vec{MA}})[2\pi]$

3) a) Montrer que si les points M, A et B sont alignés alors les points M, A, B et M' sont alignés.

b) Montrer que si les points M, A et B ne sont pas alignés alors les points M, A, B et M' sont cocycliques.

Exercice 66 : Session Normal Juin 2019

Soit m un nombre complexe non réel $(m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$

I. On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z définie par :

$$(E) : z^2 - (1+i)(1+m)z + 2im = 0$$

1) a- Montrer que le discriminant de l'équation (E) est non nul.

b- Déterminer z_1 et z_2, les deux solutions de l'équation (E)

2) On suppose dans cette question que $m = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$

a- Déterminer le module et un argument de $z_1 + z_2$

b- Montrer que si $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$ alors $z_1 + z_2 = 2i$

II. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$
On considère les points suivants :
A le point d'affixe $a = 1+i$, B le point d'affixe $b = (1+i)m$, C le point d'affixe $c = 1-i$, D l'image du point B par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et Ω le milieu du segment $[CD]$

1) a- Montrer que l'affixe du point Ω est $\omega = \dfrac{(1-i)(1-m)}{2}$

b- Calculer $\dfrac{b-a}{\omega}$

c- En déduire que $(O\Omega) \perp (AB)$ et que $AB = 2O\Omega$

2) La droite $(O\Omega)$ coupe la droite (AB) au point H d'affixe h

a- Montrer que $\dfrac{h-a}{b-a}$ est un réel et que $\dfrac{h}{b-a}$ est un imaginaire pur.

b- En déduire h en fonction de m

Exercice 67 : Session de Rattrapage Juillet 2019

Soit α un nombre complexe non nul.

I. On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(E_\alpha) : z^2 - i\alpha\sqrt{3}z - \alpha^2 = 0$$

1) a- Vérifier que le discriminant de (E_α) est $\Delta = \alpha^2$

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_α)

2) Sachant que $\alpha = |\alpha|e^{i\lambda}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, mettre les deux solutions de l'équation (E_α) sous forme exponentielle.

II. On suppose que le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On considère les points Ω, M_1 et M_2 d'affixes respectives α, $z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$ et $z_2 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$ et soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$

1) a- Montrer que $R(\Omega) = M_1$ et que $R(M_1) = M_2$

b- En déduire que les deux triangles $O\Omega M_1$ et OM_1M_2 sont équilatéraux.

2) a- Vérifier que : $z_1 - z_2 = \alpha$

b- Montrer que les deux droites (ΩM_2) et (OM_1) sont perpendiculaires.

c- En déduire que $O\Omega M_1 M_2$ est un losange.

3) Montrer que pour tout réel θ, le nombre : $Z = \dfrac{z_2 - \alpha}{z_1 - \alpha} \div \dfrac{z_2 - |\alpha|e^{i\theta}}{z_1 - |\alpha|e^{i\theta}}$ est un réel.